© А.Г. ОБУХОВ
aobukhov@tsogu.ru

УДК 519.63 + 533.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ТЕЧЕНИЙ В ПРИДОННОЙ ЧАСТИ ТОРНАДО*

АННОТАЦИЯ. В работе модифицированным методом характеристик численно строятся решения системы уравнений газовой динамики в условиях действия силы Кориолиса. Эти решения моделируют плоские изэнтропические течения идеального политропного газа, которые возникают при заданном стоке на окружности ненулевого радиуса.

SUMMARY. In this work the solutions of gas dynamic system equations construct in numerical form by a modified method of the characteristic in condition the force of Coriolis. This solutions model the plane isentropic flows of an ideal gas, which increase on a circ with a nonzero radius at the given drain.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Система уравнений газовой динамики, сила Кориолиса, плоские спиральные течения, торнадо.

KEY WORDS. System of equation of gas dynamics, worse of Coriolis, plane spiral flows, tornado.

В природе часто встречаются восходящие закрученные потоки (ВЗП) воздуха, примерами которых могут служить смерчи и торнадо.

В работах [1], [2] факт возникновения закрутки в придонной части и ее направление обоснованы с помощью построения соответствующих решений системы уравнений газовой динамики (СУГД) при учете действия силы Кориолиса (СК). Начальная стадия формирования ВЗП и его закрутка в соответствующем направлении подтверждены также экспериментами [3].

Из приведенной в [1] схемы течения газа в ВЗП следует, что закрутка воздуха в придонной части имеет принципиальное значение для течения во всем ВЗП. Целью данной работы является численное построение решений достаточно простой математической модели, с помощью которого можно описать течения в придонной части ВЗП и обосновать степень влияния на них СК.

СУГД для изэнтропических плоских течений политропного газа при учете силы Кориолиса имеет следующий вид [1], [4]:

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \dfrac{(\gamma-1)}{2} c\left(u_r + \dfrac{u}{r}\right) = 0, \\ u_t + uu_r - \dfrac{v^2}{r} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} cc_r = av, \\ v_t + uv_r + \dfrac{uv}{r} = -au. \end{cases} \tag{1}$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 11-01-00198.

В системе (1): t – время; в плоскости переменных x, y введена полярная система координат (r, φ) и предполагается, что $\partial/\partial\varphi=0$; $c=\rho^{(\gamma-1)/2}$ – скорость звука газа; γ=const >1 – показатель политропы газа в уравнении состояния $p=\rho^{\gamma}/\gamma$; u, v – радиальная и окружная составляющие вектора скорости газа соответственно; $a=2\Omega\sin\psi$ – параметр Кориолиса; Ω – модуль угловой скорости вращения Земли; ψ – широта точки O на поверхности Земли, в которой находится начало координатной плоскости xOy, касающейся поверхности Земли в точке O и вращающейся вместе с Землей. Если точка O лежит в Северном полушарии, то $0<\psi\leq\pi/2$. Если в Южном, то $-\pi/2\leq\psi<0$. Если точка O лежит на экваторе, то $\psi=0$. В системе (1) стандартным образом введены безразмерные переменные с учетом равенств: $u_{00}=r_{00}/t_{00}=c_{00}$.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ правее точки $r=r_0>0$ (см. рис. 1) задан однородный покоящийся газ, скорость звука в котором равна единице. И пусть с момента $t=0$ в точке $r=r_0$ по заданному закону $u\big|_{r=r_o}=u_*(t)$ начинается плавный ($u_*(0)=0$) радиальный сток ($u'_*(0)<0$) газа.

Для системы (1) ставятся условия:

$$c(t,r)\big|_{C^+}=1;\quad u(t,r)\big|_{C^+}=0;\quad v(t,r)\big|_{C^+}=0;\quad u(t,r)\big|_{r=ro}=u_*(t). \qquad (2)$$

Первые три условия из соотношений (2) обеспечивают непрерывное примыкание решения задачи (1), (2) через звуковую характеристику C^+ : $r=r_0+t$ к однородному покоящемуся газу. Четвертое условие в (2), задающее закон стока газа при $r=r_0$, обеспечивает единственность решения поставленной задачи с данными на звуковой характеристике C^+. Схема течения в задаче о плавном стоке представлена на рис. 1, где область покоящегося газа лежит ниже прямой C^+ и выше оси $t=0$, G_0 – область определения решения задачи (1), (2).

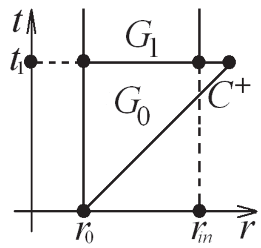

Рис. 1

Задача (1), (2) при условии аналитичности функции $u_*(t)$ имеет в некоторой окрестности точки ($t=0$, $r=r_0$) единственное аналитическое решение, в котором при $t>0$ возникает закрутка в соответствующем направлении: в положительном при $\psi>0$ и в отрицательном при $\psi<0$ [2].

Если в системе (1) не учитывать влияние СК, т.е. положить $\Omega=0$, то тогда $a=0$ и в решении задачи (1), (2) окружная скорость будет тождественным нулем: $v\equiv0$. Следовательно, в случае отсутствия действия СК никакой закрутки газа при радиальном стоке не возникает. Поэтому возникновение закрутки газа в задаче о плавном радиальном стоке есть следствие только действия СК.

В работах [1], [5] построено стационарное решение

$$c=c^{o}(r),\ u=u^{o}(r),\ v=v^{o}(r)$$

системы (1), когда в ней положено $\partial / \partial\varphi=0$. Для построения этого решения при некотором значении $r=r_{in}$, $r_{in}>r_0$ ставятся условия

$$c^{o}(r)\Big|_{r=r_{in}}=c_{in}>0; \quad u^{o}(r)\Big|_{r=r_{in}}=u_{in}<0; \quad v^{o}(r)\Big|_{r=r_{in}}=0, \tag{3}$$

которые единственным образом определяют стационарное течение. При этом функция $v^{o}(r)$ выписывается в явном виде и при $r=r_{in}$ закрутки газа нет.

Из условий (3) следует, что в стационарном решении на окружности $r=r_{in}$ осуществляется приток газа извне (из области с $r_{in}>r_0$), поскольку $u_{in}<0$. Восстановление линии тока стационарного течения в виде зависимости $\varphi=\varphi(r)$ осуществляется численно при построении решения задачи Коши:

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{v^{o}}{ru^{o}};\ \varphi(r_{in})=\varphi_{o};\ \varphi_0=\text{const}. \tag{4}$$

Приведенная в [2] теорема обеспечивает существование нестационарного течения со стоком в некоторых окрестностях как точки ($t=0$, $r=r_0$), так и звуковой характеристики C^{+}. В том числе и в моменты времени, близкие к моменту начала плавного стока из однородного покоящегося газа, сопровождающегося возникновением закрутки газа. Стационарное спиральное течение с заданным притоком и с необходимо поставленным стоком моделирует нестационарное течение при очень больших значениях времени.

Описание спирального течения со стоком от начального момента $t=0$ до достаточно больших значений времени возможно численно. И при построении такого течения определится в том числе его возможный выход на стационарный режим. Пусть при некоторых значениях r_0, r_{in}, где $0<r_0\le r\le r_{in}$, известно стационарное решение: $c^{o}(r)$, $u^{o}(r)$, $v^{o}(r)$.

Решение нестационарной задачи как решение системы (1) строится в областях G_0, G_1, представленных на рис. 1. При $0\le t\le t_1$ в области G решается задача (1), (2) с заданной функцией $u_*(t)$:

$$u\Big|_{r=ro}=u_*(t); \quad u_*(0)=0; \quad u'_*(0)<0; \quad \lim_{t\to+\infty}u_*(t)=u^{o}(r_0). \tag{5}$$

Здесь t_1 есть тот момент времени, в который рассчитанная радиальная скорость в точке $r=r_{in}$ становится приближенно равной значению $u^{o}(r_{in})$ из стационарного течения: $u(t,r)\Big|_{t=t_1,\,r=r_{in}}=u^{o}(r_{in})=u_{in}$. Рассчитанные к этому моменту времени $t=t_1$ при $r_0\le r\le r_{in}$ значения газодинамических параметров обозначаются следующим образом:

$$\mathbf{U}(t,r)\Big|_{t=t_1}=\mathbf{U}_{00}(r). \tag{6}$$

После момента времени $t=t_1$ решение системы (1) строится в полосе $G_1:\{t\ge t_1;\ r_0\le r\le r_{in}\}$. На левой границе этой полосы G_1, т.е. при $r=r_0$ продолжает ставиться заданный непрерывный сток с помощью соотношения (5). На нижней границе полосы G_1, т.е. при t=t_1 задаются условия (6). На правой границе G_1, т.е. при r=r_{in} задаются стационарные значения газодинамических параметров, определяемые значениями (6), т.е.:

$$\mathbf{U}(t,r)\big|_{r=r_{in}} = \mathbf{U}_{00}(r_{in}). \qquad (7)$$

Для нестационарного течения мгновенные линии тока в заданный момент времени t=const также определяются при решении задачи (4).

В работе [5] описана одна модификация известного метода характеристик [6], [7] и приведен пример расчета одного нестационарного плоского спирального течения со стоком в областях G_0 и G_1 с учетом начально-краевых условий (2), (5)-(7).

Цель данной работы — привести результаты расчетов нестационарных плоских спиральных течений со стоком в областях G_0, G_1 по методике из работы [5]. Для того чтобы в рамках предложенного в книге [1] подхода математически смоделировать течения газа в придонной части торнадо, была использована так называемая шкала Фудзиты [8] в виде таблицы 1.

Таблица 1

Класс торнадо	Скорость ветра, м/с	Ширина следа, м	Средняя длина пути, км	Среднее время жизни, мин
$F0$	19-32	5-15	1,9	2,4
$F1$	33-50	16-50	4,2	5,2
$F2$	51-70	51-160	8,7	10,8
$F3$	71-92	161-508	16,1	20,0
$F4$	93-116	547-1488	43,8	54,4
$F5$	117-142	1609-4989	57,1	71,0

Значения скорости ветра и ширины следа, половина которой взята за значение r_0 (радиуса окружности стока), определялись как средние значения второго и третьего столбцов таблицы 1. Значения r_{in} — радиуса окружности, на которой осуществляется приток газа в придонную часть, — вычислялись по следующему правилу. Полагалось, что средние значения скорости ветра дают значения $v^o(r_0)$ окружной скорости на окружности стока в стационарном решении. Тогда по величинам $v^o(r_0)$, r_0 и с помощью явного вида функции $v^o(r)$ определялось значение r=r_{in}, при котором равна нулю окружная скорость в стационарном решении. Такой выбор исходных параметров r_0, r_{in}, $v^o(r_0)$ и $v^o(r_{in})$=0 позволяет полностью учесть информацию о данных натурных наблюдений торнадо разных классов, приведенную в таблице 1. В приведенных расчетах брались такие значения $v^o(r_{in})$, чтобы модуль значения $v^o(r_0)$ был меньше значения $v^o(r_0)$, и чтобы число оборотов линий тока стационарного течения вокруг точки r=0 было не очень большим (2-4).

Ниже более детально описано построение течения, соответствующего классу торнадо $F3$. Значения некоторых констант и параметры предельного стационарного течения в придонной части торнадо класса $F3$ приведены в табл. 2, где h и τ – шаги по пространственной и временной переменным.

Таблица 2

Параметр	Размерное значение	Безразмерное значение
c_{00}	333 м/с	1
r_{00}	16000 м	1
$t_{00=}\ r_{00}/\ c_{00}$	48,048 с	1
Ω	0,0000727 c^{-1}	0,003492
$\sin\psi$	0,7071	0,7071
r_{in}	16000 м	1
r_0	160 м	0,.01
$c(r_{in})$	333 м/с	1
$c(r_0)$	330,6 м/с	0,9928
$u(r_{in})$	-0,333 м/с	-0,001
$u(r_0)$	-34,53 м/с	-0,10368
$\upsilon(r_{in})$	0 м/с	0
$\upsilon(r_0)$	82,21 м/с	0,24689
h	16,0 м	0,001
τ	0,024024 с	0,0005

Функция $u_*(t)$, задающая значения радиальной скорости на окружности стока при $r=r_0$, полагалась следующей:

$$u(t,r)\big|_{r=r_0} = u_*(t) = u^o(r_0)(1-e^{-Mt}), \tag{8}$$

где M – постоянное положительное число. Такой закон изменения функции $u_*(t)$ обеспечивает в точке $r=r_0$ при $t>0$ плавное изменение скорости стока от нулевого значения до $\upsilon^o(r_0)$ - значения в стационарном течении радиальной скорости на окружности стока.

После построения течения в треугольнике G_0 решение строится в полосе G_1, полагая, что $t_1=0$, поскольку СУГД инвариантна относительно сдвига по времени. В качестве начальных функций $U_{00}(r)$ (см. условия (6)) брались результирующие значения параметров газа в области G_0.

Характерным поведением параметров газа для нестационарных расчетов является формирование нескольких локальных всплесков плотностей газа, которые со скоростью звука распространяются в сторону увеличения радиуса. Синхронно происходят и соответствующие изменения других газодинамических параметров.

Выход на стационарные значения газодинамических параметров для торнадо типа $F3$ наступает к моменту времени, соответствующему 10 ч. Все газодинамические параметры к этому моменту времени принимают стационарные значения $c^o(r)$, $u^o(r)$, $\upsilon^o(r)$ и больше не изменяются.

Поскольку восстановление течения в треугольнике G_0 происходит очень быстро, массовые расчеты проводились только в полосе G_1 (рис. 1) и в качестве функций $U_{00}(r)$ условия (6) достаточно было брать постоянные функции c=1, $u=u^o(r_{in})$, v=0, а в качестве закона стока такую функцию

$$u(t,r)\big|_{r=r_0} = u_*(t) = u^o(r_0) + [u^o(r_{in}) - u^o(r_0)]e^{-Mt}.$$

Видимая разница в поведении газодинамических параметров двух таких вариантов расчета практически исчезает к 10000 временному шагу, что соответствует примерно 5 мин. размерного времени.

Точное стационарное решение $U^o(r)$ во всех нестационарных расчетах восстанавливалось с относительной погрешностью менее 1%.

В табл. 3 приведены времена выхода на стационарные значения газодинамических параметров для всех рассмотренных классов торнадо, а также значения газодинамических параметров предельного стационарного течения на окружности стока, т.е. при $r=r_0$, а также значения r_0, r_{in}.

Таблица 3

Класс торнадо	Время выхода на стационар,ч.	$c^o(r_0)$, м/с	$u^o(r_0)$, м/с	$v^o(r_0)$, м/с	r_0, м	r_{in}, км
$F0$	3.1	332,8	-11,1	25,7	4,5	1,5
$F1$	4.6	332,5	-16,8	38,0	16,3	3,7
$F2$	6.8	331,7	-24,2	60,2	53,3	8,2
$F3$	10.0	330,6	-34,5	82,2	160,0	16
$F4$	13.3	329,5	-37,9	102,8	499,2	32
$F5$	13.6	327,5	-41,8	128,4	1638	65

Во всех расчетах безразмерные значения шагов по пространственной и временной переменным были такими: h=0,001, τ=0,0005.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.

2. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Задача о плавном стоке в переменных *r; t* как характеристическая задача Коши стандартного вида // Вестник УрГУПС. 2011. №1(9). С. 4-13.

3. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н. Торнадо. М.: Физматлит, 2011. 344 с.

4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. 583 с.

5. Баутин С.П. , Рощупкин А.В. Аналитическое и численное построение решений системы уравнений газовой динамики, имеющих спиральный характер // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. №1. С. 18-29.

6. Жуков А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Тр. мат. Ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 58. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 151 с.

7. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 529 с.

8. Tatom, F.B., Witton, S.J. The transfer of energy from tornado into the ground // Seismological Research Letter. 2001. V. 72. № 1. P. 12-21.